Deutsche Hochschule
für Prävention und Gesundheitsmanagement
University of Applied Sciences

Mathematik für Informatik I

Welche Bedeutung hat die Mathematik in der Informatik?

"2 + 3 = 5"

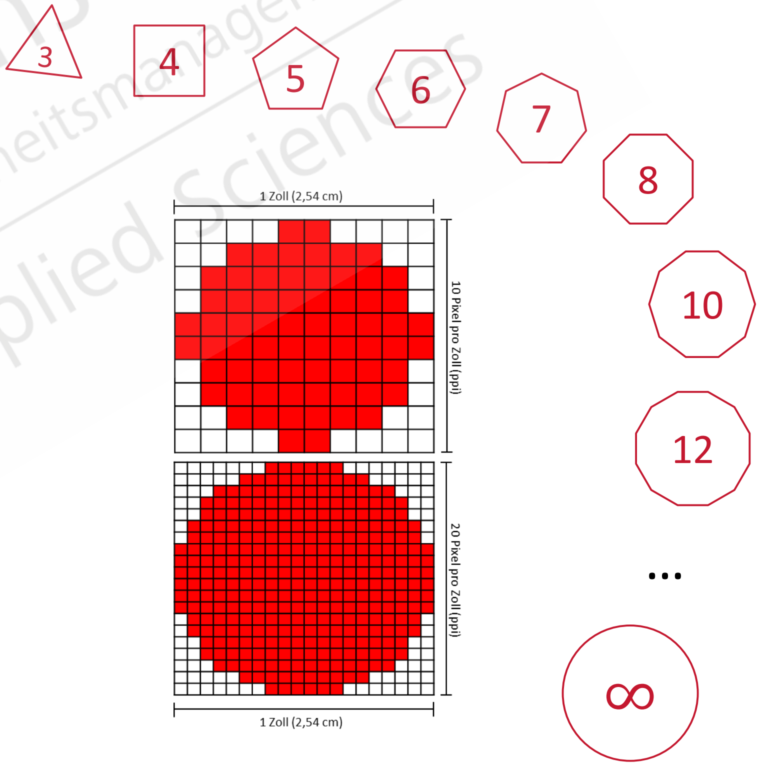
1. Die diskrete Mathematik, lineare Algebra, Analysis und Statistik sind die Grundlagen der Informatik.
2. Mathematik lehrt die Anwendung von Algorithmen.

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

⟷

```
# Syntax: Python 3.7
n = int(input('Fakultät von n = '))
f = 1
for i in range(1, n + 1):
    f *= i
print(f'{n}! = {f}')
```

Diskrete Mathematik



Mengenoperationen – Durchschnitt, Schnittmenge

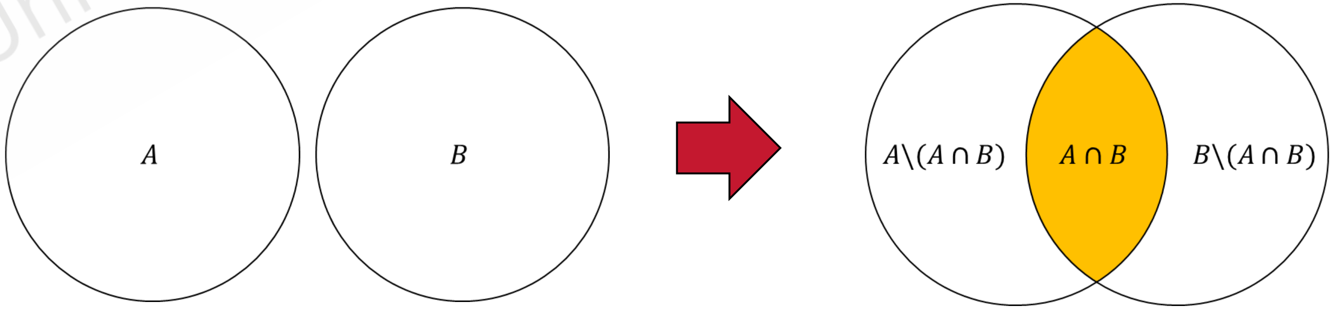
- Der **Durchschnitt** (oder **Schnittmenge)** zweier Mengen enthält alle Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind.
  - Keine Elemente, die nur in einer der beiden Mengen enthalten sind.

- Daher gilt:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} := \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \text{ und } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \,\}$$

- $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ sind **disjunkt**, falls $A \cap B = \{\,\}$

- Beispiel:
  - $A = \{9,6,1,8\}$
  - $B = \{1,7,4,9\}$
  - $A \cap B =$



Aussagen, Wahrheitswerte

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \land B$	$A \lor B$	$A \oplus B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

„Wenn $1 = 2$,

dann ist Berlin die Hauptstadt von Frankreich“

„Wenn $1 < 2$,

dann ist Berlin die Hauptstadt von Frankreich“

„Wenn $1 = 2$,

dann ist Paris die Hauptstadt von Frankreich“

„Wenn $1 < 2$,

dann ist Paris die Hauptstadt von Frankreich“

Beispiel: Teilrelation

- $M = \{1,2,3,4\}$

- $R =$„Übung x muss vor Übung y erledigt werden“

Abbildung, Funktion

- Abbildungsvorschrift: $f : \underset{\text{Definitionsmenge}}{M} \to \underset{\text{Wertemenge}}{N}$
- Zuordnung: $x \mapsto f(x)$

- Abbildung ist eine Menge von Paaren mit Bedingungen:
  - eindeutig:

$$\forall a, b \in M : \; a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

  - total definiert:

$$\forall a \in M \; \exists b \in N : \; f(a) = b$$

Eine Abbildung gilt als vollständig beschrieben, wenn Definitionsmenge, Wertemenge und Vorschrift angegeben sind.

Horner-Schema

- Naive Auswertung eines Polynoms:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \longrightarrow$$

k Multiplikationen pro Summand
+
n Additionen im Anschluss

$$\longrightarrow \frac{n}{2}(n+1) + n = \frac{n}{2}(n+3)$$

Rechenoperationen

Sehr ressourcenaufwändig!

- Horner-Schema:

$$p(x) = \big((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}\big) \cdot x \ldots + a_3) \cdot x + a_2) \cdot x + a_1) \cdot a_0)$$

$\boldsymbol{p_n}$	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-2}}$	…	$\boldsymbol{a_1}$	$\boldsymbol{a_0}$
$\boldsymbol{x}$		$\boldsymbol{b_n x}$	$\boldsymbol{b_{n-1} x}$	…	$\boldsymbol{b_2 x}$	$\boldsymbol{b_1 x}$
	$\boldsymbol{b_n}$	$\boldsymbol{b_{n-1}}$	$\boldsymbol{b_{n-2}}$	…	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_0}$

$b_n := a_n$

$b_i := a_i + b_{i+1} x$

$i = 0, \ldots, n-1$

$b_0 = p(x)$

Ist die Quersumme der Koeffizienten einer Gleichung dritten Grades (auch „kubisch“ genannt) 0 oder 1, verwendet man die ***Polynomdivision***, ansonsten das ***Horner-Schema***.

Datensicherung – Alternativer Weg

- Datenblock, der vor Übermittlung gesichert werden soll: 10101011
- Naiver Weg:
- Alternativer Weg: $f(x) = 1 \cdot x^7 + 0 \cdot x^6 + 1 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$
    - Generatorpolynom: $g(x) = x^5 + x^2 + x + 1$ $\quad \deg(g) \ll \deg(f)$
    - Mit x^5 multipliziert ergibt sich: $h(x) = x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^5$ $\quad$ d.h. es werden 5 Nullen angehängt

```
1010101100000
100111
------
00110111
  100111
  ------
  0100000
   100111
   ------
   000111000
      100111
      ------
      0111110
       100111
       ------
       011001 (Rest)
```

Übertragene Nachricht:
10101011 11001

Tupel und Vektoren

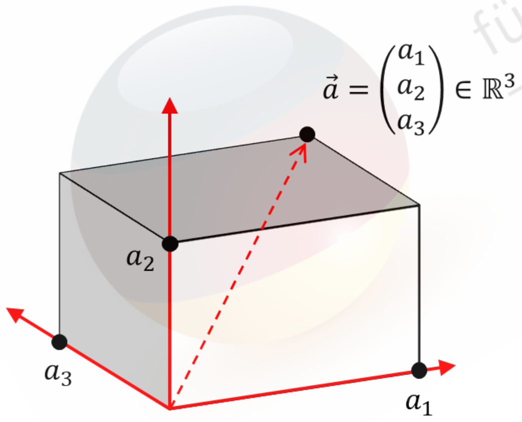
Spaltenvektor **Zeilenvektor**

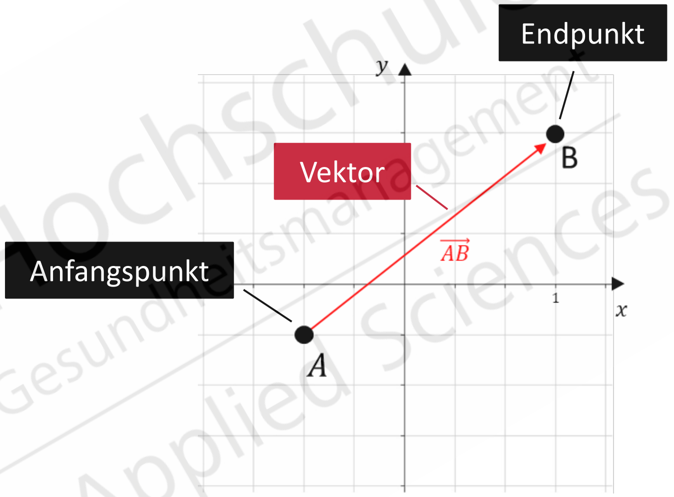
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

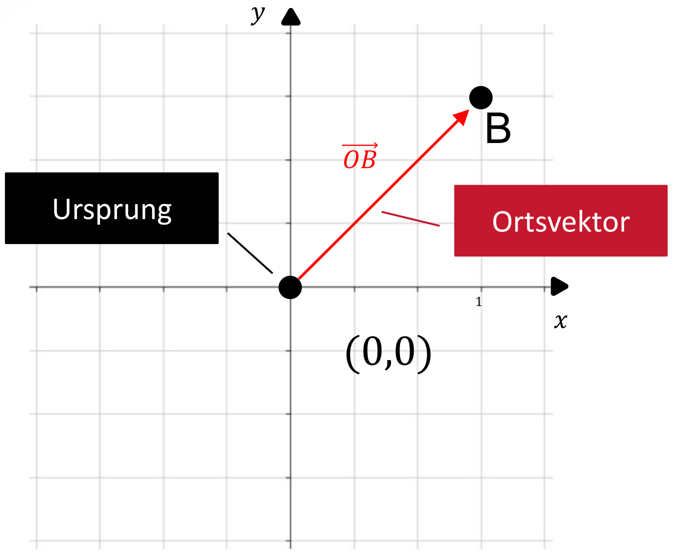
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Nullvektor: $\vec{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$

Skalare: $\lambda \in \mathbb{R}$







Lineare Unabhängigkeit

linear unabhängig

„Der Bahnhof befindet sich 2 Kilometer nördlich und 5 Kilometer östlich von hier.“

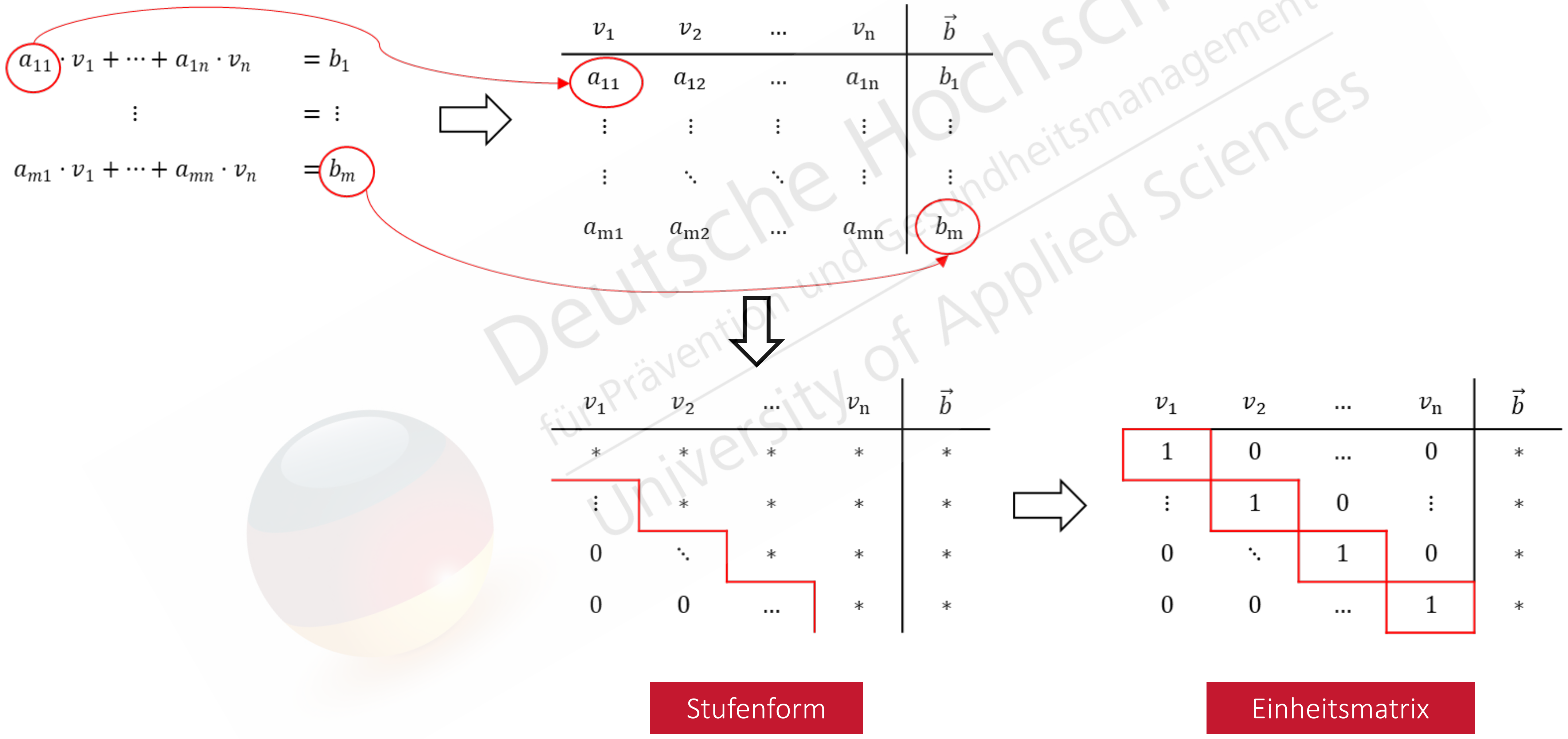
⇩

„Der Bahnhof befindet sich etwa 5,5 Kilometer nordöstlich von hier.“

Linearkombination von **2 km Nord** und **5 km Ost** ⇨ **2 km Nord** , **5 km Ost** , **5,5 km Nord-Ost**

linear abhängig!

Gauß-Jordan-Algorithmus – Tabellen- und Stufenform



Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot v_1+\cdots+a_{1n}\cdot v_n &= b_1\\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{m1}\cdot v_1+\cdots+a_{mn}\cdot v_n &= b_m \end{aligned}$$

Tabellenform

$$\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \dots & v_\mathrm{n} & \vec{b} \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \dots & a_{\mathrm{mn}} & b_\mathrm{m} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \dots & v_\mathrm{n} & \vec{b} \\ \hline * & * & * & * & * \\ \vdots & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \end{array}$$

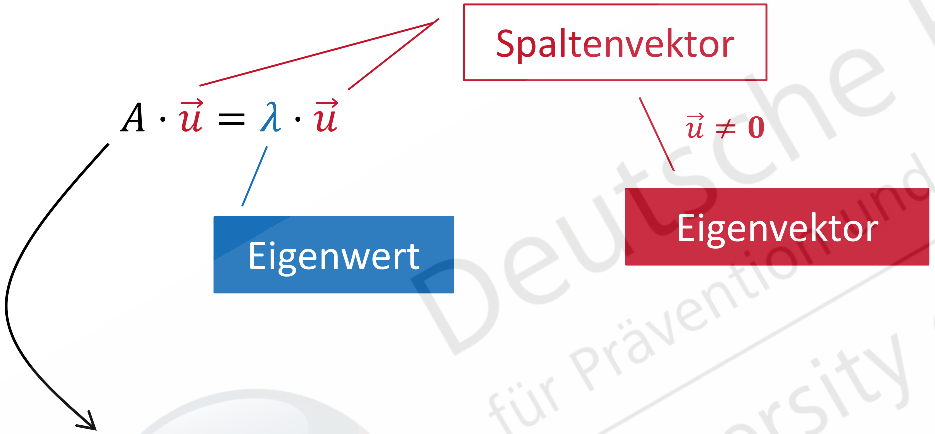
$$\begin{array}{cccc|c} v_1 & v_2 & \dots & v_\mathrm{n} & \vec{b} \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & 1 & 0 & \vdots & * \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \end{array}$$

Stufenform

Einheitsmatrix

Eigenwert, Eigenvektor

- **Gesucht**: Diagonalmatrizen der Form $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- **Eigenwertproblem** (oder –**gleichung**) :



$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$$

Spaltenvektor

$\vec{u} \neq \mathbf{0}$

Eigenwert

Eigenvektor

$$A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{I}) \cdot \vec{u} = 0 \text{ bzw. } (\lambda \cdot \mathbb{I} - A) \cdot \vec{u} = 0$$